检测技术的应用效果进行评估，发现该技术能够准确检测桥梁中的有效预应力，并提供了有益的参考信息。通过及时发现和解决潜在的问题，保证了桥梁的安全运行。

4 反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的发展趋势

4.1 反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的改进方向

为了进一步提高反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的性能和应用效果，需要从以下几个方面进行改进。

4.1.1 检测精度的提高

在反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术中，检测精度是一个关键指标。目前，已经有一些研究致力于提高检测精度。通过优化反拉装置的设计和制造，改进应变传感器的选择和安装，以及优化数据采集与处理的方法，可以进一步提高检测精度。还可以考虑引入其他先进的传感器技术，如光纤传感器、声波传感器等，以提高检测精度。

4.1.2 检测速度的提升

除了检测精度，检测速度也是反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术需要改进的方面之一。目前，反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的施工过程相对较为复杂，需要较长的时间来完成。为了提高检测速度，可以考虑优化反拉装置的施加力的大小和速度，以及优化数据采集与处理的效率。还可以探索自动化检测设备和方法，以实现快速、准确的预应力检测。

4.2 反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的应用前景

4.2.1 桥梁工程中反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术的推广

反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术具有非破坏性、高精度和抗干扰能力强等优点，逐渐得到了广泛的应用。随着该技术的不断发展和完善，相信它将在桥梁工程中得到更广泛地推广和应用。

为了推广反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术，需要加强相关的研究和开发工作。需要进一步完善该技术的理论基础，深入研究其原理和方法。需要加强与工程实践的结合，开展更多的应用案例研究，验证该技术的可行性和有效性。还需要加强技术培训和推广，提高工程师和技术人员的技术水平，推动该技术在实际工程中的应用。

4.2.2 反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术在其他工程领域的应用

除了桥梁工程，反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术还可以应用于其他工程领域。它可以应用于建筑工程中的预应力混凝土结构、地下工程中的锚固支护结构等。通过对有效预应力的准确检测，可以提高工程的安全性和可靠性，为工程实践提供有益的参考。

为了在其他工程领域推广应用反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术，需要进一步研究和开发适用于不同工程的检测方法和装置。还需要加强与相关领域的合作与交流，共同推动该技术在其他工程领域的应用。

5 结语

本文对反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术在桥梁工程中的应用进行了详细地介绍和分析。通过对该技术的原理、方法和应用案例的研究，了解到反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术具有非破坏性、高精度和抗干扰能力强等优点，能够准确检测桥梁中的有效预应力，为桥梁工程的质量和安全性提供重要保障。

在桥梁工程中，准确检测桥梁中的有效预应力对于保证桥梁的安全性和使用寿命具有重要意义。传统的预应力检测方法主要依赖于传感器的应变测量，但存在着测量精度不高、受环境因素干扰等问题。而反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术通过在预应力锚固端施加反向拉力，实现对有效预应力的准确检测，具有更高的测量精度和抗干扰能力。

除了在桥梁工程中的应用，反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术还具有在其他工程领域应用的潜力。在建筑工程中的预应力混凝土结构、地下工程中的锚固支护结构等领域，该技术也可以发挥重要作用。通过进一步研究和开发，可以将该技术推广到更多的工程领域，提高工程的安全性和可靠性。

参考文献：

[1] 吴云鹏，刘瑞华，吕文涛．反拉法桥梁锚下有效预应力检测技术及应用 [J]. 铁道科学与工程学报 ,2018,15(06):1249-1255.

[2] 李明斌，韩晓东，赵龙．基于声发射的反拉法桥梁有效预应力检测方法研究 [J]. 工程技术 ,2019,47(03):42-46.

[3] 陈伟华，张敏，刘兵，等．反拉法锚固端预应力检测技术研究 [J]. 桥梁建设 ,2017,47(04):81-85.

[4] 刘东，孙蓉，杜斌．基于振动方式的反拉法桥梁有效预应力检测方法研究 [J]. 桥梁建设 ,2019,49(01):95-99.

[5] 王晓莉，刘锋，王磊，等．基于光纤光栅的反拉法桥梁锚固段预应力检测技术 [J]. 中国公路学报 ,2020,33(07):43-49.

基金项目：桥梁锚栓下预应力检测技术标准研究，广西重点研发计划（2021AB22147）。

DOI 编码：10.13646/j.cnki.42-1395/u.2025.21.050

垂荡、横荡和横摇作用下船用转子－轴承系统的非线性振动特性

杜宝祥 *，李韶清，张晓锋，周铭华，修仁强，李尚朋

（烟台宏远载人压力舱工程技术研究院有限公司，山东 烟台 200240）

摘　要：本文考虑了船舶垂荡、横荡、横摇惯性力和非线性油膜力的影响，建立了船用转子－轴承系统的数学模型，利用数值方法得到了系统的分岔图、频谱瀑布图、幅频曲线等稳态响应，主要研究了转子转速和横摇运动幅值及频率对系统非线性动力学行为的影响。结果表明：垂荡、横荡、横摇作用下系统的振幅比不考虑此作用时要大，随转子转速增加，系统响应历经准周期和混沌；任意转速下，随横摇幅值的增加，转子振幅近似线性增大，而随横摇频率的增加，转子振幅基本不变。

关键词：垂荡、横荡、横摇运动；油膜非线性；船用转子－轴承系统；非线性振动

中图分类号：U661.3/O322　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1006—7973（2025）21-0154-04

船体的振动不仅使转子系统受到额外的牵连惯性力，还会改变轴承油膜力进而严重影响转子系统的振动特性[1]。因此，研究牵连运动下船用转子－轴承系统的非线性振动特性有重要的实际工程意义。

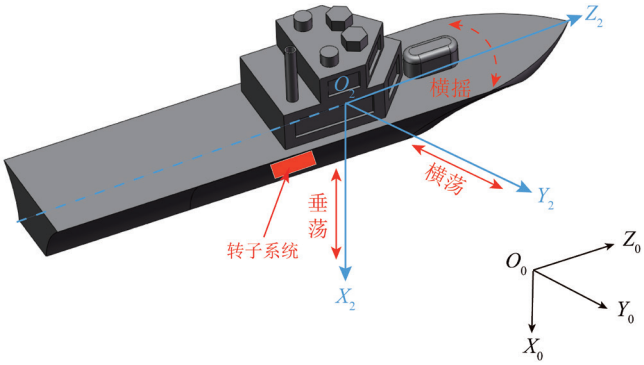
近年来，国内学者就相关问题进行了大量有益探索。Xie 等[2,3]分别研究了船舶垂荡和横摇运动对浮筏隔振耦合转子－轴承系统非线性动力学特性的影响，以数值求解了转子和浮筏的稳态响应，并通过参数优化来减小转子和浮筏的振幅。王军伟等[4]研究了横荡作用下转速、横荡幅值及频率对隔震结构耦合转子－轴承系统的非线性动力学行为的影响。结果表明转子振幅随横荡幅值、频率的增加而变大。

以上研究工作中大多只考虑船体的单一牵连运动下转子系统的振动特性。由于海面实际工况的复杂性，船舶的耦合运动是常发生的，例如船舶迎浪而行时表现为垂荡和纵摇的耦合运动[5,6]。据此，本文将综合考虑船舶的垂荡、横荡、横摇作用，重点讨论转子转速和横摇幅值及频率对船用转子－轴承系统的非线性振动特性的影响。

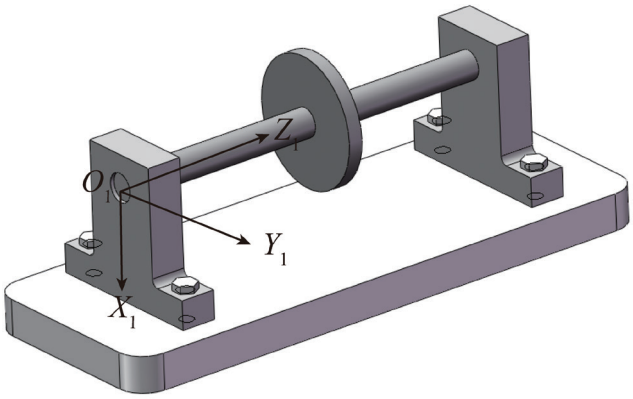
1 垂荡、横荡和横摇作用下系统的数学模型

1.1 运动方程

图 1 所示为船舶垂荡、横荡和横摇耦合下系统的运动示意图，其中$O_0X_0Y_0Z_0$为固定在地面的绝对坐标系，$O_1X_1Y_1Z_1$为随船舶转动的联船坐标系，$O_2X_2Y_2Z_2$固定在船上，且始终与$O_0X_0Y_0Z_0$平行。设x_1，y_1为船舶垂荡、横荡运动的位移，θ_{oz}是船舶的横摇角度，并计$x_1 = a_H \sin(\omega_H t)$，$y_1 = a_S \sin(\omega_S t)$及$\theta_{oz} = \theta_R \sin(\omega_R t)$，其中$a_H$和$\omega_H$是垂荡振幅及频率，$a_S$和$\omega_S$是横荡振幅及频率，$\theta_R$和$\omega_R$是横摇振幅及频率。



（a）船舶垂荡、横荡和横摇运动



（b）船用转子系统

图 1 垂荡、横荡和横摇作用下船用转子系统的坐标示意图

对转子轴承系统作如下假设：①转子为刚性轴段；②圆盘质量为 m，偏心为 e，角速度为 ω；③船舶匀速航行。由于船舶横摇频率远远小于船用转子系统的工作频率，故忽略横摇对转子系统的转动影响。

利用 Lagrange 方程得到系统的运动微分方程（1）。

$$\begin{cases}\ddot{x}=e\omega^2\cos(\omega t)+g\cos\theta_{oz}+\ddot{x}_1\cos\theta_{oz}+\ddot{y}_1\sin\theta_{oz}\\ +e\dot{\theta}_{oz}^{\,2}\cos(\omega t)+\dot{\theta}_{oz}^{\,2}x+e\ddot{\theta}_{oz}\sin(\omega t)+\ddot{\theta}_{oz}y\\ +2e\omega\dot{\theta}_{oz}\cos(\omega t)+2\dot{y}\dot{\theta}_{oz}+2F_x/m\\ \ddot{y}=e\omega^2\sin(\omega t)-g\sin\theta_{oz}-\ddot{x}_1\sin\theta_R+\ddot{y}_1\cos\theta_{oz}\\ +e\dot{\theta}_{oz}^{\,2}\sin(\omega t)+\dot{\theta}_{oz}^{\,2}y-e\ddot{\theta}_{oz}\cos(\omega t)-\ddot{\theta}_{oz}x\\ +2e\omega\dot{\theta}_{oz}\sin(\omega t)-2\dot{x}\dot{\theta}_{oz}+2F_y/m\end{cases}\tag{1}$$

其中，x、y 为转子的垂向和横向位移，e 为圆盘偏心距，ω 为转子转速，θ_{oz} 为横摇转动角度，x_1、y_1 为垂荡和横荡运动的位移，F_x、F_y 为轴端垂向和横向的非线性油膜力，m 为圆盘质量。

基于无限短轴承假设[7]求解系统的非线性油膜力，表达式可写为（2）。

$$\begin{cases}F_r=2\mu BR\left(\dfrac{R}{c}\right)^2\left(\dfrac{B}{2R}\right)^2\left[(\omega-2\dot{\theta})G_1+2\dot{\varepsilon}G_2\right]\\ F_\tau=2\mu BR\left(\dfrac{R}{c}\right)^2\left(\dfrac{B}{2R}\right)^2\left[(\omega-2\dot{\theta})G_3+2\dot{\varepsilon}G_4\right]\end{cases}\tag{2}$$

其中，μ 为润滑油黏度，B、R 和 c 分别为滑动轴承的长度、半径及油膜间隙，ε 为轴颈偏心率，$\varepsilon=\sqrt{(x^2+y^2)}/c$，$\theta$ 为轴颈偏转角度，$\theta=\arccos(x/e)$，$G_1=\dfrac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$，$G_2=\dfrac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$，$G_3=\dfrac{\pi\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$，$G_4=\dfrac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}$。

将 F_r、F_τ 变换到 X、Y 方向上，可得式（3）。

$$\begin{cases}F_x=-F_r\cos\theta-F_\tau\sin\theta\\ F_y=-F_r\sin\theta+F_\tau\sin\theta\end{cases}\tag{3}$$

1.2 无量纲运动方程

为消除物理单位的影响，引入轴承油膜间隙 c 和时间尺度 t 对系统进行无量化，并规定：$\dot{x}=dx/dt$，$\dot{y}=dy/dt$，$\dot{\theta}=d\theta/dt$，$X'=dX/d\tau$，$Y'=dY/d\tau$，$\theta'=d\theta/d\tau$。表 1 为相关无量纲参数。

表 1 系统的无量纲参数

无量纲参数	表达式	无量纲参数	表达式
时间 τ	$\tau=\omega t$	横荡频率比 η_S	$\eta_S=\sqrt{c\omega_S^2/g}/\Omega$
偏心距 α	$\alpha=e/c$	横摇频率比 η_Y	$\eta_R=\sqrt{c\omega_R^2/g}/\Omega$
转子转速 Ω	$\Omega=\sqrt{c\omega^2/g}$	*Sommerfeld*数	$\sigma=\bar{\sigma}/m\sqrt{gc}$
垂荡幅值 A_H	$A_H=a_H/c$	油膜力 f_i	$f_i=F_i/mg, i=x,y$
横荡幅值 A_S	$A_S=a_S/c$	转子 1/2 长度 L	$L=l/c$
垂荡频率比 η_H	$\eta_H=\sqrt{c\omega_H^2/g}/\Omega$	长径比 λ	$\lambda=B/(2R)$

则系统无量纲运动方程表达式为（4）。

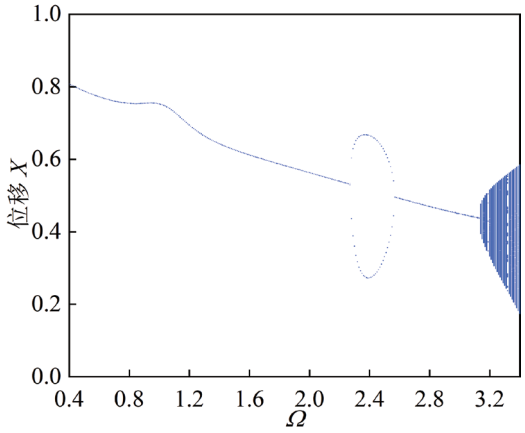
$$\begin{cases}X''=\alpha\cos\tau-\eta_H^{\,2}A_H\sin(\eta_H\tau)\cos(\theta_R\sin(\eta_R\tau))-\eta_S^{\,2}A_S\sin(\eta_S\tau)\sin(\theta_R\sin(\eta_R\tau))+\\ (\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau))^2\alpha\cos\tau+X(\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau))^2-\theta_R\eta_R^{\,2}\sin(\eta_R\tau)\alpha\sin\tau+2f_x/\Omega^2-\\ Y\theta_R\eta_R^{\,2}\sin(\eta_R\tau)+2\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau)\alpha\cos\tau+2Y'\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau)+\cos(\theta_R\sin(\eta_R\tau))/\Omega^2\\ Y''=\alpha\sin\tau+\eta_H^{\,2}A_H\sin(\eta_H\tau)\sin(\theta_R\sin(\eta_R\tau))-\eta_S^{\,2}A_S\sin(\eta_S\tau)\cos(\theta_R\sin(\eta_R\tau))+\\ (\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau))^2\alpha\sin\tau+Y(\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau))^2+\theta_R\eta_R^{\,2}\sin(\eta_R\tau)\alpha\cos\tau+2f_y/\Omega^2+\\ X\theta_R\eta_R^{\,2}\sin(\eta_R\tau)+2\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau)\alpha\sin\tau-2X'\theta_R\eta_R\cos(\eta_R\tau)-\sin(\theta_R\sin(\eta_R\tau))/\Omega^2\end{cases}\tag{4}$$

2 非线性振动特性分析

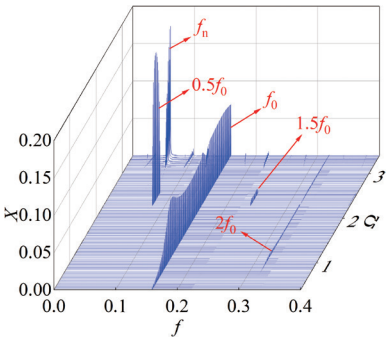
式（4）中给出了船用转子系统在垂荡、横荡和横摇作用下的 2 自由度无量纲方程。由于轴承油膜力具有较强的非线性，难以求得系统的解的解析表达式，本文采用龙格－库塔法求解无量纲微分方程，得到系统的稳态响应。系统初始值设为 $X=0.2$，$X'=0$，$Y=0.05$，$Y'=0$。转子系统的结构参数取值设为 $\lambda=0.2$，$\sigma=3$，$\alpha=0.05$，$L=22$。

2.1 转子转速对系统振动特性的影响

图 2 为不考虑船舶运动时系统的分岔图和频谱瀑布图。由分岔图可以看出：①当转速 $\Omega<2.27$，系统做稳定的单周期同步运动，瀑布图中工频 f_0 占主要成分，二倍频 2 f_0 占比很小，此时系统主要受转子的不平衡力影响。②当转速增加到 $\Omega=2.27$ 时，系统发生了倍周期分岔，进入周期 2 运动状态，对应瀑布图中新增频率 1/2 f_0 及其奇数倍频 3/2 f_0，此时系统开始出现油膜涡动现象。③转速达到 $\Omega=2.57$ 时，系统重回周期 1 运动状态，对应瀑布中频率 1/2 f_0 及其奇数倍频 3/2 f_0 消失，非线性油膜力几乎不再影响转子振动。④转速增大到 $\Omega=3.13$ 时，对应瀑布图中出现离散的不可公约的峰值，意味着系统进入准周期运动状态。综上，转子转速从 0.40 增加到 3.40 过程中，系统振动响应变化过程为 P–1 → P–2 → P–1 →准周期。



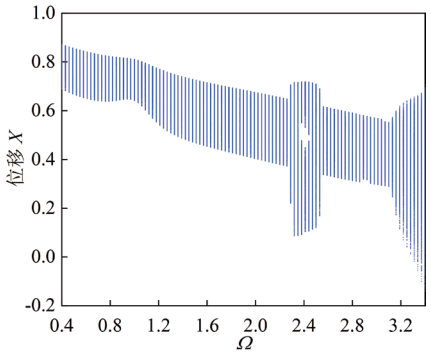
（a）分岔图



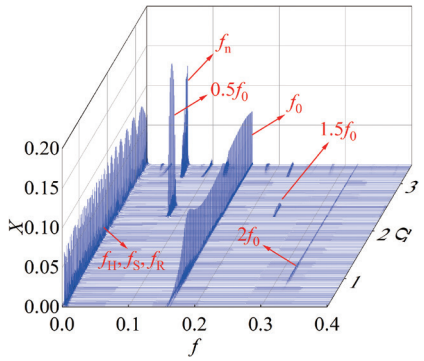
（b）频谱瀑布图

图 2 不考虑船舶运动时系统的分岔图和频谱瀑布图

图 3 为考虑船舶运动时系统的分岔图和频谱瀑布图。由分岔图可以看出：①在转速$\Omega < 2.29$时，系统运动是准周期的，对应瀑布图中出现垂荡频率f_H、横荡频率f_S、横摇频率f_R、工频f_0及其二倍频 2 f_0，此时牵连惯性力和转子不平衡力共同主导转子振动。②转速增大到$\Omega = 2.29$时，系统发生了准周期分岔，对应的瀑布图中新增频率 1/2 f_0与其奇数倍频 3/2 f_0。③系统在转速$\Omega = 2.56$处经过倒分岔重回到一支的准周期运动状态，瀑布图中频率 1/2 f_0及其奇数倍频 3/2 f_0消失。④转速达到Ω=3.13 时，系统进入混沌状态，瀑布图中的频谱成分变得更为复杂，且存在连续谱。综上，系统响应随转速增加表现为：准周期→混沌。



（a）分岔图



（b）频谱瀑布图

图 3 考虑船舶运动时系统的分岔图和频谱瀑布图

2.2 横摇参数对系统振动特性的影响

图 4 给出了不同转速下系统振幅随横摇幅值变化曲线。不难发现在不同转子转速下转子振幅随横摇幅值的增加近乎线性增大。值得注意的是当转子转速$\Omega = 2.40$、$\Omega = 3.35$时，由于转子受非线性油膜力和牵连惯性力的共同作用，转子分别在横摇幅值$\theta_R = 0.65$、$\theta_R = 0.56$时触碰到轴瓦内壁。

图 5 为不同转子转速下系统振幅随横摇频率变化曲线。可以看出在不同转子转速下系统振幅随横摇频率变化趋势相似，不考虑横摇运动时系统振幅明显小于考虑横摇运动的系统。除在横摇频率等于 0.5 f_H、f_H、2 f_H时系统振幅小幅减小外，转子振幅基本稳定。

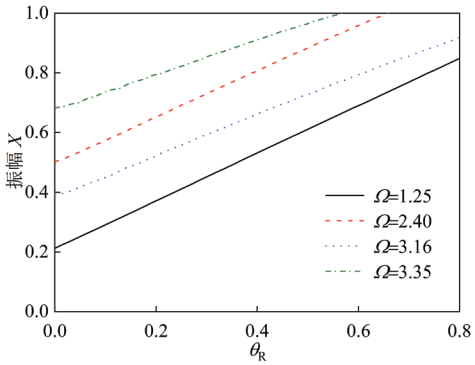


图 4 不同转速下系统振幅随横摇幅值变化曲线

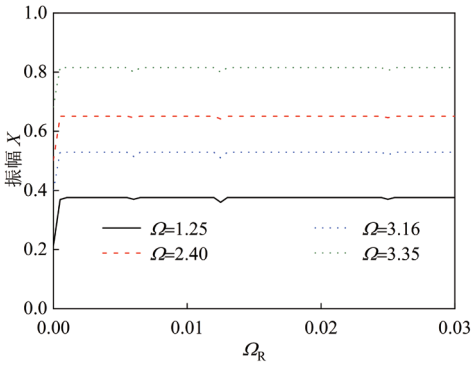


图 5 不同转速下系统振幅随横摇频率变化曲线

3 结论

建立了垂荡、横荡和横摇耦合作用下船用转子系统的数学模型，并利用分岔图、瀑布图等分析了系统的非线性振动特性。研究结论如下：

（1）垂荡、横荡和横摇作用下转子系统的振幅比不考虑此运动时显著增大；相较于不考虑船舶运动时系统出现的简单周期运动，考虑垂荡、横荡和横摇作用后系统运动状态更加复杂，随转子转速增加，系统响应历经准周期和混沌。