

深水五阶 Stokes 波的快速近似计算方法

赖隼澜, 张琪, 张超民, 盖宏扬, 张洋*

(厦门理工学院土木工程与建筑学院, 福建 厦门 361024)

摘要: 本文给出一个快速近似计算深水五阶 Stokes 波波面升高的方法。利用 ABR 三角级数拟合深水五阶 Stokes 波的波面升高解析解, 并得到 ABR 三角级数中参数 r 与波浪要素之间的函数关系, 进而可以利用该函数关系快速近似计算深水五阶 Stokes 波波面升高。结果表明, ABR 三角级数可以拟合深水五阶 Stokes 波波面升高的解析解, 拟合偏差随波高增加或周期变短而增加。利用波陡估计 r 偏差很小, 因此可以利用 ABR 三角级数快速近似计算深水五阶 Stokes 波的波面升高。

关键词: 五阶 Stokes 波; 波陡; 快速计算

中图分类号: TV92

文献标识码: A

文章编号: 1006—7973 (2025) 05—0151—03

A Fast Approximation Method for Calculating the Surface Elevation of Deep-Water Fifth-Order Stokes Waves

Lai Jun-lan, Zhang Qi, Zhang Chao-min, Gai Hong-yang, Zhang Yang*

(School of Civil Engineering and Architecture, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, Fujian, China)

Abstract: This paper presents a fast approximation method for calculating the surface elevation of deep-water fifth-order Stokes waves. The ABR trigonometric series is used to fit the analytical solution of the surface elevation of deep-water fifth-order Stokes waves, and the functional relationship between the parameters r in the ABR trigonometric series and the wave parameters is obtained. This functional relationship can then be used to quickly approximate the surface elevation of deep-water fifth-order Stokes waves. The results show that the ABR trigonometric series can fit the analytical solution of the surface elevation of deep-water fifth-order Stokes waves, with the fitting deviation increasing as the wave height increases or the period decreases. The deviation estimated of r by the wave steepness is very small, so the ABR trigonometric series can be used to quickly approximate the surface elevation of deep-water fifth-order Stokes waves.

Keywords: fifth-order Stokes waves; wave steepness; fast calculation

研究海洋中非线性水波的计算方法在海洋工程中具有重要应用价值。非线性水波具有波峰尖锐而波谷平坦的特征, 且该非线性特征随波陡增加而变得更加显著^[1]。Gerstner 首先给出深水情况非线性水波的精确解析解, 但是, 该精确解旋且质量输移为零, 其表达式为拉格朗日坐标形式, 不方便工程应用^[2]。Stokes^[3] 首先提出了求解非线性水波近似解析解的方法, 即 Stokes 波理论。他通过摄动技术, 以波陡为扰动参量给出二阶、三阶和五阶近似解。此后, 研究人员又进一步给出了一系列高阶的 Stokes 波表达式^[4-6], 这些表达式在工程中得到广泛应用。

低阶 Stokes 波理论给出的近似解析解在波浪非线性较强 (波陡较大) 时具有较大误差, 高阶 Stokes 波理论给出的近似解析解虽然精度高但是其表达式比较复杂。因此本文研究深水五阶 Stokes 波的快速近似计算方法, 即寻找一个形式简单的表达式近似描述深水五阶 Stokes 波, 但精度保持与五阶 Stokes 波给出的解析解相当。因此本文研究的计算方法同时具有表达式简单且精度较高的优点。

1 研究方法

在以与波速相同速度匀速运动的参考系中, 波面升高 η 与时间无关而仅是水平坐标 x 的函数, 因此, 可以利用下面 ABR 三角级数近似表达波面升高:

$$\eta(x) = \frac{H}{2} f \sum_{n=1}^{N=\infty} b^{n-1} \sin[nkx - (n-1)\frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{H}{2} f \frac{\sin kx - r / (1 + \sqrt{1-r^2})}{1 - r \sin kx} \quad (1)$$

式中: H 是波高; k 是波数; $r = 2b / (1 + b^2)$ ($r \in [0, 1]$) 是描述波形非线性强弱程度的参数, $r = 0$ 对应线性波, r 数值越大则 ABR 三角级数计算得到的波形非线性特征越强; $f = \sqrt{1-r^2}$ 是保证 $\eta(x)$ 最大值与最小值之差等于波高 H 的参数。

采用 ABR 三角级数的原因是该级数中参数 H 一般是给定的参数, k 则可以方便地通过线性波或者 Stokes 波理论计算, 此外仅含有一个表达波浪非线性强弱的参数 r , 这方便我们找到 r 与波浪要素之间的函数关系。

最初 Abreu 等^[7] 通过该级数近似计算近底水平流速时间历程, 并且 Ruessink 等^[8] 通过现场实测数据给出了 ABR 三角级数中参数的确定方法。本研究采用枚

举法求出 $r \in [0,1]$ 范围内 ABR 三角级数与五阶 Stokes 波理论波面升高解析解偏差最小时的参数 r 数值。然后重复上述过程,找到参数 r 与不同波浪要素之间的函数关系式,进而可以通过 ABR 三角级数近似并快速预报深水非线性波的波面升高,并且该预报结果的精度与五阶 Stokes 波理论给出的解析解精度相当。

2 结果与讨论

2.1 波浪要素影响

2.1.1 波高影响

为了讨论不同波高情况 ABR 三角级数对五阶 Stokes 波理论给出的解析解的拟合结果,图 1 给出水深 $h=100\text{ m}$,周期 $T=5\text{ s}$,波高 $H=2\text{ m}$ 、 3 m 和 4 m 时,本文方法计算得到的波面升高与五阶 Stokes 波理论给出的解析解之间的对比。从图中可以看出,ABR 三角级数与五阶 Stokes 波理论得到的结果符合良好,二者得到的波面基本重合,且波面升高均呈现出波峰尖锐、波谷平坦的特征。这一非线性特征随着波高增加而变得更加显著。

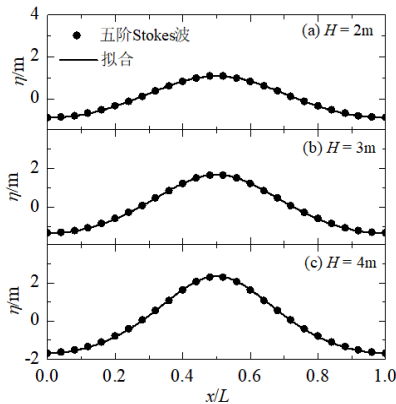


图 1 不同波高 ABR 三角级数对五阶 Stokes 波理论解析解的拟合结果

表 1 参数取值以及拟合误差

h/m	H/m	T/s	r	Δ
100	2	5	0.162	0.168%
100	3	5	0.245	0.382%
100	4	5	0.330	0.667%
100	4	7.5	0.144	0.132%
100	4	10	0.081	0.041%

为了定量描述拟合误差,表 1 给出了不同波浪要素情况 ABR 三角级数对五阶 Stokes 波理论解析解的拟合误差,其计算表达式为:

$$\Delta = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (\eta_{ABR} - \eta_{Stokes})^2 dx} \quad (2)$$

式中: η_{ABR} 是 ABR 三角级数的拟合结果, η_{Stokes} 是五阶 Stokes 波理论给出的解析解, L 是波长。

从表 1 中可以看出对于不同波高情况, Δ 均在 1% 以内。这表明,利用 ABR 三角级近似表达五阶 Stokes 波理论解析解对于不同波高情况均具有良好适用性。注

意到, Δ 随着波高增加而变大,这表明利用 ABR 三角级数拟合五阶 Stokes 波理论解析解对于波高较小情况精度更高。

2.1.2 周期影响

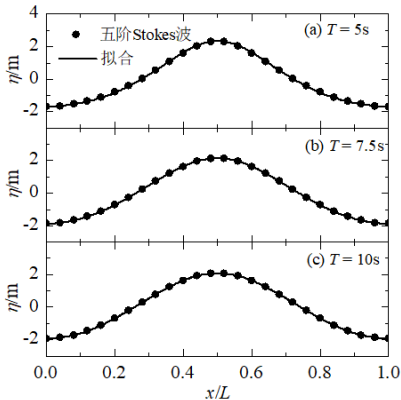


图 2 不同周期 ABR 三角级数对五阶 Stokes 波理论解析解的拟合结果

为了讨论不同波浪周期情况 ABR 三角级数对五阶 Stokes 波理论给出的解析解的拟合结果,图 2 给出水深 $h=100\text{ m}$,波高 $H=4\text{ m}$,周期 $T=5\text{ s}$ 、 7.5 s 和 10 s 时,本文 ABR 三角级数拟合得到的波面升高与五阶 Stokes 波理论给出的解析解之间的对比。从图中可以看出不同波浪周期情况,ABR 三角级数与五阶 Stokes 波理论得到的结果均符合良好。二者得到的波面升高均呈现出波峰尖锐、波谷平坦的特征,且该非线性特征随着周期变短而变得更加显著,这也可以通过参数 r 随着周期变短而增加看出 (r 数值越大,则 ABR 级数描述的波面形状非线性特征越明显)。

从表 1 中可以看出对于不同波浪周期情况, Δ 均在 1% 以内。这表明,利用 ABR 三角级近似表达五阶 Stokes 波理论解析解对于不同波浪周期情况均具有适用性。注意到, Δ 随着周期增加而变小,这表明利用 ABR 三角级数拟合五阶 Stokes 波理论解析解对于周期较大情况精度更高。

2.2 快速近似计算方法

本节给出通过波浪要素快速计算 ABR 三角级数中参数的计算方法,进而可以通过 r 与波浪要素之间的函数关系式快速计算深水五阶 Stokes 波的波面升高。图 3 给出水深 $h=100\text{ m}$,周期 $T=2.5\text{ s}$ 、 5 s 、 7.5 s 和 10 s ,波高 $H \in [0.01\text{ m}, H_b]$ ($H_b = 0.14gT^2/(2\pi)$ 是深水破碎波高) 时的 r 与波陡 $\varepsilon = kH$ 之间的散点图以及拟合曲线。散点图数据是通过 ABR 三角级数逼近五阶 Stokes 波理论解析解得到(具体方法见第 1 节)。图 3 中拟合曲线表达式为:

$$r = 0.188\varepsilon^2 + 0.452\varepsilon \quad (3)$$

从图 3 中可以看出,式 (3) 与散点图拟合良好,即利用式 (3) 通过波陡 ε 计算 r 具有较高准确性。

因此,我们最终得到了快速近似计算深水五阶 Stokes 波波面升高的方法。第一步,通过给定的波浪要

枫叶大桥工程壅水计算分析研究

谭毅

(江西省水利科学院, 江西 南昌 330000)

摘要: 七一水库是金沙溪上的中型水库, 为研究枫叶大桥工程对七一水库阻壅水的影响, 本文采用经验公式与二维水流数学模型两种方法, 收集水库水文、地形等资料, 对新建桥梁进行壅水计算分析, 提出跨河桥梁最大壅水高度这一指标在防洪影响评价中计算方法选取的建议。

关键词: 桥梁工程; 壅水高度; 数学模型; 经验公式

中图分类号: U442.3+3

文献标识码: A

文章编号: 1006—7973 (2025) 05—0153—03

河道管理范围内修建桥梁将占用河道的行洪断面, 对涉河桥梁引起的壅水计算是建设项目防洪影响评价的重要内容之一。本次利用枫叶大桥工程实例, 依据《河道管理范围内建设项目防洪评价报告编制导则 (SL 808-2021)》采用经验公式和数学模型两种方式, 为工程防洪影响评价中壅水计算方法的选择提供参考。

1 项目概况

1.1 建设项目概况

研究项目地处金沙溪中游段七一水库库区, 距下游大坝约 8.0 km, 桥梁全长 670 m, 跨七一水库桥梁长 366 m, 采用 12 m × 30 m 先简支后连续小箱梁形式, 桥梁宽度 9.0 m。工程位置如图 1 所示。

素计算波陡 ε ; 第二步, 利用式 (3) 估计参数 r 的数值; 第三步, 利用式 (1) ABR 三角级数计算波面升高 η , 该波面升高即可作为深水五阶 Stokes 波的近似解。

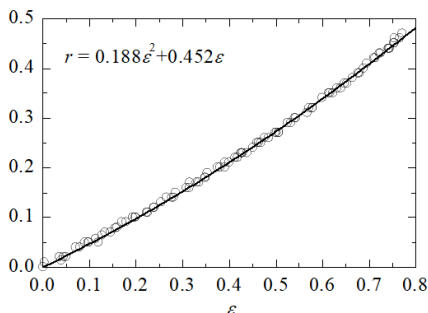


图 3 r 与波陡 ε 之间的散点图及拟合曲线

3 结论

本文利用 ABR 三角级数对深水五阶 Stokes 波波面升高解析解进行拟合, 得到了 ABR 三角级数中参数 r 与波陡 ε 之间的函数关系式, 利用该函数关系式可以实现对深水五阶 Stokes 波波面升高的快速近似计算。

结果表明: 对于不同波高与周期情况, ABR 三角级数均可以良好拟合五阶 Stokes 波波面升高解析解, 拟合偏差随波高增加或周期变短而增加, 偏差一般不超过 1%。利用式 (3) 通过波陡 ε 估计 r 偏差很小, 因此可以利用式 (3) 实现通过 ABR 三角级数快速近似计算深水五阶 Stokes 波的目的。

参考文献:

- [1] 邹志利. 水波理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社发行处出版社, 2005.
- [2] Gerstner F. Theorie der wellen: Abhandlungen der Koniglichen Bohmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prague[J]. Reprinted in: Annalen der Physik, 1809, 32(08): 412 - 445.
- [3] Stokes G G. On the theory of oscillatory waves[J]. Transactions of the Cambridge philosophical society, 1847, 08: 441-455.
- [4] Lesht, Barry, M. Nearshore Dynamics and Coastal Processes: Theory, Measurement, and Predictive Models. Kiyoshi Horikawa[J]. The Journal of Geology, 1989.
- [5] Zhao K, Liu P L F. On Stokes wave solutions[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2022, 478(2258): 20210732.
- [6] Fang H, Liu P L F, Tang L, et al. The theory of fifth-order Stokes waves in a linear shear current[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2023, 479(2280): 20230565.
- [7] Abreu T, Silva P A, Sancho F, et al. Analytical approximate wave form for asymmetric waves[J]. Coastal Engineering, 2010, 57(07): 656-667.
- [8] Ruessink B G, Ramaekers G, Van Rijn L C. On the parameterization of the free-stream non-linear wave orbital motion in nearshore morphodynamic models[J]. Coastal engineering, 2012, 65: 56-63.

基金项目: 福建省中青年教育科研项目 (科技类) (JAT220344); 福建省大学生创新创业训练计划项目 (4030124003); 厦门理工学院高层次人才科研启动项目 (YKJ22043R)